به نام خدا

جزوه برنامه نویسی متلب، جلسه ششـــم

حدس کولاتز : هرگاه عددی صحیح و مثبت را به عنوان ورودی در نظر بگیریم و دنباله‌ای از آن عدد با قواعـــد زیر تولید کنیم آنگاه پس از چند تکرار به عدد ۱ خواهیم رسید.

قواعد : اگر عدد زوج بود برای تولید عدد بعدی عدد فعلی را نصف کن. اگر عدد فرد بود برای تولید عدد بعدی عدد فعلی را در ۳ ضرب نموده و آن را با یک جمع می کنیم.

$$f(n) = \begin{cases} n/2 & \text{if } n \equiv 0 \pmod 2 \\ 3n+1 & \text{if } n \equiv 1 \pmod 2. \end{cases}$$

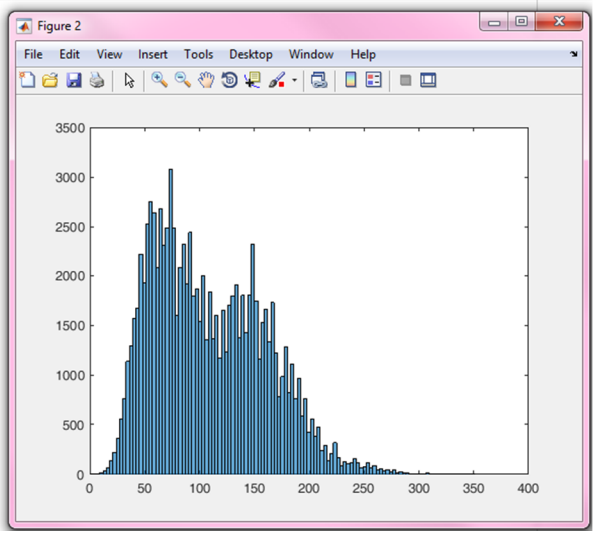
برای تولید دنباله کولاتز از برنامه زیر استفاده می‌کنیم. اگرچه برای اعدادی که توانی از عدد ۲ باشند محاسبه طول دنباله بسیار ساده است اما بطور کلی طول دنباله برای هر عدد ورودی عددی متفاوت است. حدس کولاتز هنوز بطور فرمال اثبات نشده است.

collatz.m

```
clearvars
clc
prompt = 'Enput N : ';
N = input(prompt);
cnt = 1;
while (N ~= 1)
    if (rem(N,2)==0)
        N = N/2;
    else
        N = 3*N + 1;
    end
    N
    cnt = cnt + 1;
end
X = ['The length of sequence is ',num2cell(cnt)];
disp(X)
```

مثال : برنامه‌ای بنویسید که طول دنباله کولاتز برای اعداد یک الی صدهزار محاسبه کند و نمودار آن را ترسیم نماید. سپس هیستوگرام (بافت‌نگار) آن را ترسیم نماید. از روی هیستوگرام آن چه نتیجه‌ای می‌توان گرفت ؟

```
collatz2.m
1 -   clearvars
2 -   clc
3 -   A = [];
4
5 -   for cnt = 1:100000
6 -       N = cnt;
7 -       k=1;
8 -       while (N ~= 1)
9 -           if (rem(N,2)==0)
0 -               N = N/2;
1 -           else
2 -               N = 3*N + 1;
3 -           end
4 -           k=k+1;
5 -       end
6 -       A = [A k];
7 -   end
8 -    plot(A);
9 -    figure;
0 -    histogram(A);
```



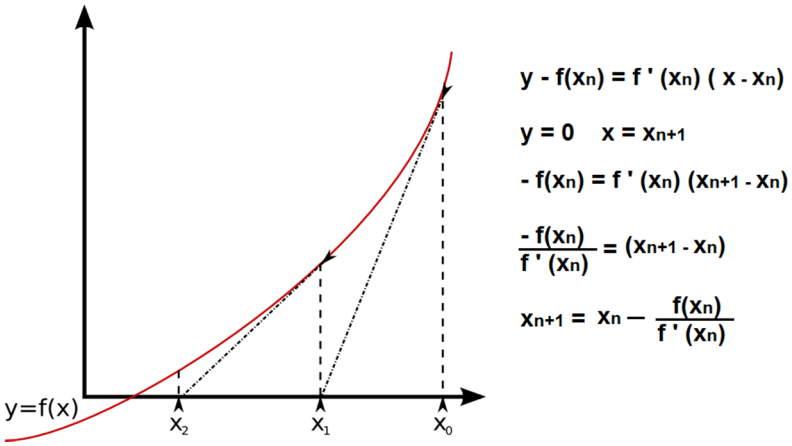
روش نصف کردن برای یافتن ریشه‌ها : هرگاه ریشه‌های معادله $y=f(x)$ مطلوب باشد با در نظر گرفتن شرایطی می‌توان از روش نصف‌کردن برای یافتن یکی از ریشه آن در بازه مشخص [a,b] استفاده کرد. شرط اول آنست که تابع f در بازه [a,b] پیوسته باشد. شرط دوم آنست که علامت f(a) و f(b) متفاوت باشند. و شرط سوم آنست که در بازه [a,b] مشتق تابع f مخالف صفر باشد. در روش نصف کردن بازه [a,b] به عنوان تقریب اولیه در نظر گرفته می‌شود سپس نقطه m وسط این بازه محاسبه شده و دو بازه [a,m] و [m,b] مورد بررسی قرار می‌گیرد اگر f(m) و f(b) هم علامت باشند آنگاه ریشه در بازه [a,m] قرار خواهد داشت و اگر f(a) و f(m) هم علامت باشند ریشه در بازه [m,b] قرار خواهد داشت. بازه جدید به عنوان ورودی مجدد مورد استفاده قرار می‌گیرد و الگورتیم تکرار می‌گردد تا جایی که f(m) به اندازه دلخواه کوچک شود.

مثال : برنامه‌ای در متلب بنویسید که با روش نصف کردن ریشه تابع $f(x) = x + \cos(x)$ را در بازه [-2,2] پیدا کنید.

```
%Bisection
% function y = f(x) is defined in a seperate file
%     y = x + cos(x);
clc
clearvars
a = -2;
b =  2;
m = ( a + b )/2;
e = 10^-6;

while(abs(f(m))>e)
    if(sign(f(a))==sign(f(m)))
        a = m;
    else
        b = m;
    end
    m = ( a + b )/2;
end
m
```

روش رفسون-نیوتن برای یافتن ریشه‌ها : هرگاه ریشه‌های معادله y=f(x) مطلوب باشد می‌توان از روش رفسون-نیوتن برای یافتن یکی از ریشه آن در بازه مشخص [a,b] استفاده کرد. برای شروع نقطه‌ای دلخواه از بازه (معمولا وسط بازه) را انتخاب می‌کنیم.



$$y - f(x_n) = f'(x_n)(x - x_n)$$

$$y = 0 \quad x = x_{n+1}$$

$$-f(x_n) = f'(x_n)(x_{n+1} - x_n)$$

$$\frac{-f(x_n)}{f'(x_n)} = (x_{n+1} - x_n)$$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

مثال : برنامه‌ای در متلب بنویسید که با روش رفسون-نیوتن ریشه تابع $f(x) = \sin(x) - x/2$ را در بازه $[1.5, 2]$ پیدا کنید.

راهنمایی: مشتق تابع $f(x)$ بصورت $f'(x) = \cos(x) - ½$ می‌باشد.

raphson_newton.m

```
clc
clearvars

a = 1.5;
b = 2;
x = (a+b)/2;
e = 10^-6;

while(abs(f(x))>e)
    x = x - f(x)/df(x);
end
x
f(x)
```

برای محاسبه مشتق توابع از دستورات زیر استفاده می‌کنیم

```
>> syms x
>> f = sin(x) - 0.5*x;
>> df = diff(f,x)

df =

cos(x) - 1/2
```

برای محاسبه انتگرال نامعین از دستور int و برای محاسبه انتگرال معین از دستور integral استفاده می‌کنیم

```
>> clearvars
>> f = @(x) exp(-x.^2).*log(x).^2

f =

    @(x)exp(-x.^2).*log(x).^2

>> Q = integral(f,0,Inf)

Q =

    1.9475
```

```
>> clearvars
>>
>>
>> syms x
>> int(x)

ans =

x^2/2
```

indefinite integral
انتگرال نامعین

محاسبه انتگرال بر حسب متغیر

```
>> clearvars
>> syms x z
int(x/(1 + z^2), x)
int(x/(1 + z^2), z)

ans =

x^2/(2*(z^2 + 1))


ans =

x*atan(z)
```

محاسبه انتگرال معین برای تابع f(x) = sin(x) در بازه [0,pi/2] با دو روش. روش اول با استفاده از توابع متلب روش دوم با استفاده حد مجموع. مقادیر N را از ۱۰ شروع کرده و برای ۱۰۰ ، ۱۰۰۰، ۱۰۰۰۰ و ۱۰۰۰۰۰ تست نمایید.

```
>> clearvars
>> f = @(x) sin(x)

f =

    @(x)sin(x)

>> integral(f,0,pi/2)

ans =

    1.0000
```

```
>> clearvars
>> syms x
>> int(sin(x),0,pi/2)

ans =

1
```

integral_primitive.m*

```
clc
clearvars
S = 0; N = 100000;
x = 0; h = (pi/2)/N;
for k = 1:N
    S = S + h * sin(x);
    x = x + h;
end
S
```